

### Zadanie 1.

Jaś jest amatorem trunków, przy czym w barku miewa: bourbona (B), likier (L), wytrawne martini (M) i wino (W). Alkohole te naturalnie różnią się od siebie:

- są różnej mocy – zawartość alkoholu rośnie w następującej kolejności:  $W < L < M < B$ ;
- L i W są napojami owocowymi, dodatkowo to trunki „kobiece”;
- B i M mają korzystne własności dla leczenia syndromu dnia następnego.

Jaś zauważył, że w różne dni tygodnia ma różne potrzeby i tak:

- czwartki spędza z dziewczyną – wybierze najmocniejszy z kobiecych trunków (jeśli są), jeśli nie ma takiej możliwości, to wybierze najślabszy dostępny trunek;
- w piątek liczy się moc – wybierze najmocniejszy dostępny trunek;
- sobota to dzień wolności – wybierze dowolny trunek, jedynie, jeśli zobaczy w menu likier, uświadomi sobie, że – o ile to możliwe – lepiej stronić od owocowych trunków, i ich nie wybierze, jeśli nie ma takiej możliwości, to wybór między owocowymi trunkami jest obojętny;
- w niedzielę, jeśli będzie to możliwe, wybierze trunek „leczniczy”, jeśli nie – wybór nie ma znaczenia.

A. Uzupełnij poniższą tabelę wskazując wartości funkcji wyboru dla różnych menu i dni tygodnia.

Menu do wyboru	Dzień tygodnia			
	czwartek	piątek	sobota	niedziela
{W,B}				
{W,L}				
{W,L,B}				
{W,L,M,B}				

B. Ograniczając się jedynie do menu z tabeli powyżej, wypisz wszystkie przypadki, gdy reguła stosowana któregoś dnia nie posiada którejś z własności  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i krótko uzasadnij.

### Zadanie 2.

Dany jest zbiór wariantów  $X=\{a,b,c,d\}$ , i reguła wyboru  $C(\cdot)$  spełniająca własności  $\alpha$  i  $\gamma$ . Wiemy, że  $C(b, c)=\{b, c\}$ ,  $C(a, b, d)=\{b\}$ . Podaj wszystkie możliwe wartości reguły wyboru (może być więcej niż jedna reguła, które spełnia podane zależności) w następujących sytuacjach:

A.  $C(c, d) =$

B.  $C(a, d) =$

C.  $C(X) =$

### Zadanie 3.

Dany jest zbiór wariantów  $X=\{a,b,c,d\}$ , i reguła wyboru  $C(\cdot)$  spełniająca własności  $\beta$  i  $\gamma$ . Wiemy, że  $C(b, c)=\{b, c\}$ ,  $C(a, c, d)=\{a, c\}$ . Podaj wszystkie możliwe wartości reguły wyboru (może być więcej niż jedna reguła, które spełnia podane zależności) w następujących sytuacjach:

A.  $C(c, d) =$

B.  $C(b, c, d) =$

C.  $C(X) =$

### Zadanie 4.

Jan jest smakoszem trunków, przy czym w barku miewa: amaretto (A), gin (G), szkocką (S), wermut (W). Mając do wyboru dany zestaw trunków (czasem niektórych nie posiada) wybiera nie trunek do picia, a zestaw trunków, z

których każdy danego wieczora będzie smakował. Tak więc jeśli  $X$  oznacza zbiór posiadanych trunków, to menu z którego wybiera Jan – oznaczone  $X^*$  – to de facto wszystkie podzbiory  $X$  (dopuszczamy, że Jan może nic nie pić).

Na przykład, jeśli w barku ma  $G$  i  $M$ , czyli  $X=\{G,M\}$ , to menu jest dane jako zbiór  $X^*=\{\emptyset, \{G\}, \{M\}, \{G,M\}\}$ , co kolejno oznacza, że: nie pije w ogóle, pije tylko gin, pije tylko martini, pije gin i martini.

Reguła wyboru oczywiście może z danego menu  $X^*$  wybierać kilka elementów, np. może być  $C(X^*)=\{\emptyset, \{G,M\}\}$ , co oznacza, że dla tego zestawu Jan może postanowić nie pić w ogóle, albo pić gin z martini, natomiast nie ma możliwości, żeby wybrał picie jedynie ginu (albo jedynie martini).

Alkohole te mają różne własności:

- $W$  i  $G$  mogą służyć jako aperitif;
- koktaile można robić mieszając następujące pary alkoholi:  $A$  i  $S$ ,  $G$  i  $W$ ,  $S$  i  $W$ ;
- $G$  i  $S$  nazwijmy alkoholami mocnymi.

Sposób wyboru Jana zmienia się codziennie i tak:

- w piątek pija jak smakosz – najpierw koniecznie coś jako aperitif, potem jakiś drink lub alkohol mocny, przy czym składnikiem drinka ani alkoholem mocnym nie może być to, co pił jako aperitif – jeśli nie może spełnić tych warunków, nie pije nic;
- w sobotę pija jedynie alkohole mocne ale jest rozsądny i nie miesza ich ze sobą – jeśli to niemożliwe, pije dowolny słaby alkohol (także nie miesza);
- w niedzielę pija wykwitnie – dowolny drink albo nic.

A. Wypełnij poniższą tabelę wszystkimi możliwymi wartościami reguły wyboru Jana (może być tak, że dla danego zestawu trunków możliwych jest kilka wyborów zestawów na wieczór).

Dostępne alkohole	Dzień tygodnia		
	piątek	sobota	niedziela
<b>A,W</b>			
<b>W,A,G</b>			
<b>W, A, G, S</b>			

B. Zdefiniujmy własność  $\alpha^*$  – powiemy, że jest spełniona przez regułę wyboru, jeśli, gdy dany składnik  $S$  może być wybierany (być może w zestawie) z danej listy trunków, to dla każdej mniejszej listy trunków, na której się znajduje, istnieje taki wybór, który zawiera  $S$  (pojedynczo lub w zestawie). Wskaż wszystkie przypadki naruszenia własności  $\alpha^*$  w powyższej tabeli, krótko uzasadniając.

### Zadanie 5.

Poniższa tabela opisuje wartości i własności trzech reguł wyboru  $C_1, C_2, C_3$  ze zbioru trzejelementowego  $\{a, b, c\}$ . *Uzupełnij puste miejsca, wpisując wartości reguły wyboru lub słowa „tak”/„nie”. Jeśli daną kolumnę można uzupełnić na kilka sposobów, to w każdej komórce wstaw wszystkie możliwości, oddzielając je średnikami.*

<b>M</b>	<b><math>C_1(M)</math></b>	<b><math>C_2(M)</math></b>	<b><math>C_3(M)</math></b>
<b>{a,b}</b>		{a,b}	
<b>{a,c}</b>	{a,c}		{a}
<b>{b,c}</b>	{c}	{c}	
<b>{a,b,c}</b>			{a,b}
<b>własności reguł wyboru <math>C_1-C_3</math></b>			
<b><math>\alpha</math></b>	tak		tak
<b><math>\beta</math></b>	tak	tak	nie
<b><math>\gamma</math></b>		tak	
<b>WARP</b>		nie	

### Zadanie 6.

Rozważmy zbiór liczb rzeczywistych  $\mathfrak{R}$  i relację binarną  $\geq_\delta$  w tym zbiorze zdefiniowaną następująco. Dla każdego  $x, y \in \mathfrak{R}$  mamy  $x \geq_\delta y$ , jeśli  $x \geq y - \delta$  (w sensie nierówności liczb), dla pewnego  $\delta > 0$ , tzn.  $x$  jest co najwyżej niewiele mniejsze od  $y$ . Jak pamiętasz, na podstawie relacji binarnej można próbować zdefiniować funkcję wyboru  $C^*$  w następujący sposób (ograniczmy się do skończonych menu  $X$ ):

$$C^*(X) = \{x \in X : \forall y \in X \text{ zachodzi } x \geq_\delta y\}$$

Odpowiedz na poniższe pytania, krótko uzasadniając lub podając minimalny kontrprzykład.

- A. Czy tak zdefiniowana funkcja wyboru zawsze wskazuje jakiś wariant (dla skończonych menu)?
- B. Czy  $C^*$  spełnia własność  $\alpha$ ?
- C. Czy  $C^*$  spełnia własność  $\beta$ ?
- D. Czy  $C^*$  spełnia własność  $\gamma$ ?

### Zadanie 7.

Załóżmy, że decydent wybiera między różnymi niepustymi podzbiorami skończonego, niepustego zbioru  $Z$ . Czyli dla danego zbioru  $Z$  menu jest zbiorem niepustych podzbiorów  $Z$ .

Przykładowo, jeśli  $Z$  jest zbiorem marek piwa,  $Z = \{\text{Lech, Pilsner Urquell, Tyskie, Żywiec}\}$ , to najpełniejsze menu obejmuje  $\{\{\text{Lech}\}, \dots, \{\text{Żywiec}\}, \{\text{Lech, Pilsner Urquell}\}, \{\text{Lech, Tyskie}\}, \dots, \{\text{Lech, Pilsner Urquell, Tyskie, Żywiec}\}\}$ , zaś wybór jednego wariantu oznacza np. ustalenie marki/marek piwa kupowanych na imprezę (bez wskazania ilości).

Rozważmy funkcję wyboru  $C(\cdot)$  zdefiniowaną następująco (dla danego  $B \subset (2^Z \setminus \emptyset)$ ):

$$C(B) = \operatorname{argmax}_{x \in B} \left( \min_{y \in B} (\#(x \cap y)) \right),$$

gdzie  $\#$  oznacza liczebność zbioru.

Funkcja  $C(\cdot)$  wskazuje ten wariant, który ma najwięcej wspólnych elementów z innymi dostępnymi wariantami. Możemy tę funkcję interpretować np. tak, że decydent nie wie, na jaką kombinację elementów z  $Z$  będzie miał ochotę i chce wybrać taki wariant, który najbardziej przybliży wszystkie inne.

- A. Dokonaj wyboru ze zbioru  $B = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}\}$ . Krótko uzasadnij.
- B. Na czym polega własność  $\alpha$ ? Czy reguła wyboru spełnia tę własność? Krótko uzasadnij lub podaj prosty kontrprzykład (prostota kontrprzykładu także jest oceniana)
- C. Na czym polega własność  $\beta$ ? Czy reguła wyboru spełnia tę własność? Krótko uzasadnij lub podaj prosty kontrprzykład (prostota kontrprzykładu także jest oceniana)
- D. Na czym polega własność  $\gamma$ ? Czy reguła wyboru spełnia tę własność? Krótko uzasadnij lub podaj prosty kontrprzykład (prostota kontrprzykładu także jest oceniana)
- E. [potrzebna wiedza z kolejnych wykładów] Scharakteryzuj jak najkrócej relację  $R^*$  (relację ujawnionych preferencji) indukowaną funkcją  $C$  dla pełnego menu (tj. zawierającego wszystkie niepuste podzbiory  $Z$ ).
- F. [potrzebna wiedza z kolejnych wykładów] Czy relacja  $R^*$  odtwarza oryginalne wyboru  $C$ ? Uzasadnij. Jeśli nie odtwarza, to jakie wybory z kolei rekomenduje  $R^*$ ?

**Zadanie 8.**

W tabeli poniżej zebrano informacje dotyczące trzech funkcji wyboru ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ) działających na podzbiorach zbioru  $\{x, y, z\}$ . Pokazano niektóre wybory i podano informacje o spełnieniu lub nie niektórych spośród własności  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Wypełnij pozostałą część tabeli.

menu	wybór C1	wybór C2	wybór C3
$\{x, y\}$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{x\}$
$\{x, z\}$	$\{z\}$	$\{x, z\}$	
$\{y, z\}$	$\{y, z\}$	$\{z\}$	$\{y\}$
$\{x, y, z\}$	$\{y\}$		
własność	reguła C1	reguła C2	reguła C3
$\alpha$		nie	tak
$\beta$			tak
$\gamma$		tak	

**Zadanie 9.**

Poniższa tabela opisuje wartości i własności czterech reguł wyboru  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  ze zbioru trzelementowego  $\{a, b, c\}$ . Uzupełnij puste komórki, wpisując wartości reguły wyboru lub słowa „tak”/„nie”. Jeśli daną kolumnę można uzupełnić na kilka sposobów, to w każdej komórce wstaw wszystkie możliwości, oddzielając je średnikami.

M	$C_1(M)$	$C_2(M)$	$C_3(M)$	$C_4(M)$
$\{a, b\}$			$\{a\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c\}$		$\{a, c\}$		$\{a\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}$		$\{b\}$	
$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$		
własności reguł wyboru $C_1$ - $C_4$				
$\alpha$	tak		tak	
$\beta$			tak	tak
$\gamma$				tak
WARP	nie	tak		nie