Zadanie 1.

Rozważ zadanie 1 z poprzedniego zestawu. Preferencje Jasia w które dni można reprezentować racjonalną relacją preferencji (pre-porządkiem zupełnym)?

Zadanie 2.

Dana jest relacja preferencji R będąca porządkiem częściowym (tzn. jest przechodnia, zwrotna i antysymetryczna) w skończonym zbiorze X. Dla dwóch elementów $x,y \in X$ powiemy, że xPy, jeśli xRy i nie yRx. Sformułowano następujące funkcje przyporządkowujące podzbiorom X ich podzbiory, kolejno wybierające:

C_1 – elementy największe, tj. $C_1(Y)=\{y \in Y: \forall z \in Y$ zachodzi $yRz\}$,

C2 – elementy maksymalne, tj. $C_2(Y)=\{y \in Y: \sim\exists z \in Y$, że zachodzi $zPy\}$,

C3 – elementy preferowane względem największej liczby elementów, tj. $C_3(Y)=\{\text{argmax}_{y \in Y} \#\{z \in Y: yRz\}\}$.

Uzupełnij tabelę wpisując „tak" lub „nie".

M	C_1(M)	C_2(M)	C_3(M)
zawsze zwraca jakiś element			
wskazuje, co najwyżej jeden element			
zawiera się w C_1 (tzn. jeśli zwraca jakiś element, to C_1 też go zwraca)	tak (z def.)		
zawiera się w C_2 (tzn. jeśli zwraca jakiś element, to C_2 też go zwraca)		tak (z def.)	
zawiera się w C_3 (tzn. jeśli zwraca jakiś element, to C_3 też go zwraca)			tak (z def.)
jeśli zwraca kilka elementów (np. x, y), to znaczy, że są równie dobre dla decydenta (czyli xRy i yRx)			

Zadanie 3.

Rozważmy zbiór $X=R^3$, zawierający elementy $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Wprowadźmy 4 relacje – R_1, R_2, R_3, R_4. Powiemy, że:

$\mathbf{x}R_1\mathbf{y}$, jeśli $\mathbf{x \geq y}$ (czyli $x_1 \geq y_1$, $x_2 \geq y_2$, $x_3 \geq y_3$),

$\mathbf{x}R_2\mathbf{y}$, jeśli istnieje wektor $\mathbf{y^*}$ z przestawionymi elementami wektora $\mathbf{y}$, że $\mathbf{x \geq y^*}$,

$\mathbf{x}R_3\mathbf{y}$, jeśli $x_1+x_2+x_3 \geq y_1+y_2+y_3$,

$\mathbf{x}R_4\mathbf{y}$, jeśli $\min(x_1,x_2,x_3) \geq \min(y_1,y_2,y_3)$.

(Jeśli elementy X oznaczają bogactwo trzech osób w grupie, to relacje te możemy interpretować: R_1 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli nikomu się nie pogarsza, przy czym osoby są odróżnialne; R_2 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli nikomu się nie pogarsza, przy czym osoby są nieodróżnialne; R_3 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli suma bogactwa jest większa; R_4 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli najgorzej sytuowanej osobie się poprawia.)

*Wypełnij tabelę, wstawiając T w komórce (i,j), jeśli z $\mathbf{x}R_i\mathbf{y}$ wynika $\mathbf{x}R_j\mathbf{y}$, tj. zachodzenie relacji z wiersza dla **x** i **y** implikuje zachodzenie relacji z kolumny dla **x** i **y**. Wstaw N w pozostałych komórkach tabeli.*

Wariant	R_1	R_2	R_3	R_4
R_1	T			
R_2		T		
R_3			T	
R_4				T

Zadanie 4.

Rozważmy zbiór wariantów decyzyjnych $X=R_+$. Rozważmy trzy relacje

R_1: $x R_1 y \Leftrightarrow x \geq y$
R_2: $x R_2 y \Leftrightarrow x \geq y+\delta$, dla ustalonego ściśle dodatniego δ (traktujmy jako dany parametr)
R_3: $x R_3 y \Leftrightarrow x \geq y-\delta$, dla ustalonego ściśle dodatniego δ (traktujmy jako dany parametr)

Wskaż, które relacje R_1-R_3 posiadają poszczególne własności. Jeśli dana relacja nie posiada danej własności, podaj jak najprostszy przykład.

A. zupełność

B. przechodniość

C. antysymetryczność

D. negatywna przechodniość

Dla danej relacji R można zdefiniować relację P w następujący sposób:
$x P y \Leftrightarrow xRy \wedge \sim yRx$
Dla każdej z powyższych relacji R_i zdefiniujmy w ten sposób relację P_i.
Wskaż, które relacje P_1-P_3 posiadają poszczególne własności.

E. $\forall x,y,x\neq y$ zachodzi xP_iy lub yP_ix

F. jest przechodnia

Zadanie 5.

Rozważmy zbiór $X=R^3$, zawierający elementy $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Wprowadźmy 4 relacje preferencji ostrej („jest lepsze niż") – P_1, P_2, P_3, P_4. Powiemy, że:

$\mathbf{x}P_1\mathbf{y}$ – $\exists i,j, i \neq j, i,j \in \{1,2,3\}\ x_i > y_i \wedge x_j > y_j$
$\mathbf{x}P_2\mathbf{y}$ – $Me\{x_1,x_2,x_3\}>Me\{y_1,y_2,y_3\}$, gdzie Me to mediana
$\mathbf{x}P_3\mathbf{y}$ – $x_1+x_2+x_3 > y_1+y_2+y_3$
$\mathbf{x}P_4\mathbf{y}$ – $\max\{x_1,x_2,x_3\} - \min\{x_1,x_2,x_3\} < \max\{y_1,y_2,y_3\} - \min\{y_1,y_2,y_3\}$

Jeśli elementy X oznaczają użyteczność trzech osób w grupie, to relacje te możemy interpretować:

- P_1 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli co najmniej dwóm osobom jest lepiej
- P_2 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli klasie średniej jest lepiej
- P_3 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli łączna użyteczność jest większa (utylitaryzm)
- P_4 – wolimy rozkład **x** niż **y**, jeśli dysproporcje (zdefiniowane jako różnica między najlepiej a najgorzej sytuowanym) są mniejsze

Wypełnij tabelę, wskazując, które własności mają poszczególne relacje.

	P_1	P_2	P_3	P_4
przechodniość				
asymetryczność				
negatywna przechodniość				